数理解析研究所講究録
137巻 1972年 53-58



# 有限単純群の低いランクの極大部分群について.

東大 理 坂内英一

群Gの部分群Hによる両側剰余類の個数 $|H\backslash G/H|$ をHのGにおけるランクと呼ぶ。これはGを剰余類 $G/H$ の上に働らく置換群とみたときの置換群のランクに等しい。

既知の有限単純群に対して、その低いランクの極大部分群としてどのようなものが存在するか？

ということを以下で考えます。特にランクが2の部分群の決定は、2重可移な置換表現の決定ということと同じことです。なお、この問題を考えるようになった動機は、第4回代数学シンポジウム報告集（箱根1963）pp. 26−31 の都筑先生による報告、にあるので、それも参照して下さい。

先ず、既知の単純群で2重可移表現を持つものは、現在までの所、次のものしか知られていません。都筑先生の報告, ibid, の list（及び数学辞典2版の Yugengun の項に出ている list）より少し増えていることに注意して下さい。

$A_n$ (交代群)

$M_n$ (Mathieu 群)

$PSL(n,q)$ (特殊一次変換群 $= A_{n-1}(q)$)

$PSU(3,q^2)$ (3次ユニタリー群 $= {}^2A_2(q^2)$)

$Sz(q)$ (鈴木群 $= {}^2B_2(q)$)

$Ree(q)$ (Ree 群 $= {}^2G_2(q)$)

$Sp(2n,2)$ ($GF(2)$ 上の斜交群)

Higman-Sims (次数 176)

Conway's group of the smallest order (次数 276)

さて、交代群、Mathieu 群のランク2部分群は古くから既に決定されています。交代群のランクの低い極大部分群に関連して、次の結果が得られました。

<u>結果 1.</u> 交代群 $A_n$ (および対称群 $S_n$) のランク5以下の極大部分群を決定した。

すなわち、それらは、自然なもの、i.e., $\cong A_n \cap (S_i \times S_{n-i})$, ($\cong (S_i \times S_{n-i})$ 対称群の場合), $i=1,2,3,4$, を除けば、$n \leq 18$ の場合に限り存在し、$n \leq 18$ の場合も、それらを完全に list up することが出来る. (詳しくは文献[1]を参照して下さい。)

以下目標をLie型単純群の低いランク(特にランク2)の極大部分群の決定におきます。

ことわらない限り、以下GをLie型単純群、pをGを定義する有限体GF(q)の標数とします。

次の定理はこの問題を考え始めるにあたっての出発点となっています。

定理(J. Tits, T. Tsuzuku)　HがGの極大部分群で、Hの(Gにおける)指数がpと互いに素であれば、HはGの極大なparabolic部分群である。更にHのランクが2(従って極大)であれば、Gは次のいずれかである。

1) $G = PSL(n, q)$ $(= A_{n-1}(q))$

2) $G = PSU(3, q^2)$ $(= {}^2A_2(q^2))$

3) $G = Sz(q)$ $(= {}^2B_2(q))$

4) $G = Ree(q)$ $(= {}^2G_2(q))$.

全てのLie型単純群のランク2部分群の決定、がこれからやろうとしている当面の目標ですが、現在の所、計算の困難さ等があり、まだそこまでは到達していません。それでもいくつかのtypeの群に対してはそれが完成しているので、それらの結果について記すことにします。そこでの証明の方法は、原理的には、他のtypeのLie型単純群に対しても、

適用可能であると考えています。

<u>結果2.</u>　単純群 $G=PSL(n, q)$ のランク2部分群を決定した。

すなわち、それらは自然なもの（i.e., $PSL(n, q)$ を射影空間の点又は超平面の集合の上に働らかせた時の1"点"の stabilizer と共役になるもの）を除けば、次の場合にのみ存在する。

1)　$(n, q)=(2, 5)$　,　of index 5

2)　$(n, q)=(2, 7)$　,　〃　7.

3)　$(n, q)=(2, 9)$　,　〃　6

4)　$(n, q)=(2, 11)$　,　〃　11

5)　$(n, q)=(3, 2)$　,　〃　8

6)　$(n, q)=(4, 2)$　,　〃　8.

（詳しくは、文献[2]を参照して下さい。）

<u>結果3.</u>　単純群 $G=Sp(2n, 2)$, $n\geqq 3$, のランク2部分群は次のいずれかと同型

1)　$O(2n, 2, +1)$,　of index　$2^{n-1}(2^n+1)$

2)　$O(2n, 2, -1)$,　〃　$2^{n-1}(2^n-1)$.

（文献[3]参照.）

(Cf. J. McLaughlin, Some subgroups of $SL_n(\mathbb{F}_2)$, Ill. J. Math 13 (1969) 108–115.)

結果4. 単純群 $G=Sp(4, 2^r)$, $r>1$, のランク2部分群は存在しない。
(文献[4]参照。)

以下、一般の斜交群 $PSp(2n, q)$、他の Lie 型単純群に関して考察中です。

上の結果の証明の方針は、各 type の群により、それぞれ異なりますが、大雑把にいえば、
1) H の指数が(任意の元 $x\in G$ に対する中心化群 $C_G(x)$ の指数)+1 でおさえられるという Maillet の Lemma (Cf. [2], Lemma 3)
2) $(1_H)^G = 1_G + \chi$ なる G の既約指標 $\chi$ がかなり制限されること。(Cf. [2], Lemma 7, [3], Lemma 4, etc.)
が一番主要な点で、具体的には $\chi$ を制限するために幾何学的方法(Piper の結果、$PSL(n, q)$ の場合)、Lie 型の群の通常表現論に関する深い結果(Green の $GL(n, q)$ の character の構成、$PSL(n, q)$ の場合;Curtis-Iwahori-Kilmoyer (to

appear in Publ. I.H.E.S) $Sp(n, q)$ の場合) 等を用います。詳しくは直接に次の文献を参照して下さい。

## References

[1] E. Bannai, Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups (submitted to the J. of Fac. of Sci. Univ. Tokyo.)

[2] ———, Doubly transitive permutation representations of the projective special linear groups $PSL(n, q)$, (to appear in the Osaka J. of Math.)

[3] ———, On some subgroups of $Sp(2n, 2)$, (to appear)

[4] ———, Some simple groups having no multiply transitive permutation representations, (preprint, unpublished.)

## 参考文献

J. A. Green, On the Steinberg characters of finite Chevalley groups. Math. Z. (1970). Wielandt 記念号.